(Option générale et option Agronomie)

DURÉE : 2 heures

Le problème est constitué de deux parties indépendantes.

PARTIE I

Dans un élevage de poules pondeuses, aux heures de ponte maximale, le nombre X d'œufs pondus dans un enclos en 15 minutes suit une loi de *Poisson* de paramètre 10.

1. Quelles sont les valeurs de X ayant la probabilité maximale ?

2. Quelle est la probabilité pour que, au cours de 15 minutes, il y ait entre 7 et 12 œufs pondus (au sens large) ?

3. Certains œufs sont déclassés (cassés ou de poids insuffisant). La probabilité pour qu'un œuf pondu soit déclassé est 0,03.
   Sur un lot de N œufs pondus, quelle est la loi de probabilité suivie par le nombre Y_N d'œufs déclassés ?

On reprend les notations de la question précédente ; a, b et N étant des entiers naturels $(a \leq b)$, on désigne par E l'événement $a \leq Y_N \leq b$. On a ainsi :
E : " sur N œufs pondus on en a déclassé un nombre compris, au sens large, entre a et b."

4. *Lecture de table* : on pose $N = 200$.
   Déterminer les couples d'entiers (a, b) pour lesquels on a $P(E) > 0{,}95$, $(b - a)$ étant minimum.

5. On suppose à présent $N = 4000$.
   a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y_N ?
      Soient f la densité continue et F la fonction de répartition associées à cette approximation.
      Donner, pour tout x réel, les expressions de $f(x)$ et $F(x)$.
      On rappelle que f est la dérivée de F.
   b) On définit, pour h réel positif fixé, une fonction φ de la variable réelle x en posant :
      $$\varphi(x) = F(x + h) - F(x - h).$$
      Étudier les variations de la fonction φ.
      Où faut-il placer le milieu du segment $[\alpha, \beta]$ pour que, l'amplitude $(\beta - \alpha)$ étant fixée, $P(\alpha \leq Y_N \leq \beta)$ soit maximale ?
   c) Trouver un intervalle $[a, b]$ centré en 120, de longueur minimale, tel que l'on ait : $P(E) > 0{,}95$.

PARTIE II

Soient M et I les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $J = M - I$.
   a) Calculer J^2 en fonction de J.
   b) Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in N}$ telle que, pour tout entier naturel n on ait : $M^n = I + u_n J$ (on pose par convention $M^0 = I$).
   Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c) Pour tout entier n, on pose : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique. En déduire u_n en fonction de n.

2. Écrire la matrice M^n pour un entier naturel n quelconque.

Les poules pondent des œufs que l'on classe selon trois calibres A, B et C : les gros, les moyens et les petits. On estime que :

- si une poule pond un œuf de calibre A, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives égales à 1/2, 1/4, 1/4 ;
- si elle pond un œuf de calibre B, le suivant sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives égales à 1/4, 1/2, 1/4 ;
- si elle pond un œuf de calibre C, le suivant sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives égales à 1/4, 1/4, 1/2.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités respectives pour que le $n^{\text{ème}}$ œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

3. a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = UX_n$.
   b) Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.

4. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est petit (calibre C).
   On a donc : $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ et $c_1 = 1$.
   Déduire des questions précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n, ainsi que leur limite lorsque n tend vers $+\infty$.

TABLE I : LOI DE POISSON

X étant une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre a, on pose : $p(k, a) = P(X = k)$ et $F(k, a) = P(X \leq k)$.

	$a = 1$		$a = 2$		$a = 3$		$a = 4$		$a = 5$		$a = 6$		$a = 7$		$a = 8$	
k	$p(k, a)$	$F(k, a)$	$p(k, a)$	$F(k, a)$	$p(k, a)$	$F(k, a)$	$p(k, a)$	$F(k, a)$	$p(k, a)$	$F(k, a)$	$p(k, a)$	$F(k, a)$	$p(k, a)$	$F(k, a)$	$p(k, a)$	$F(k, a)$
0	0,36788	0,36788	0,13534	0,13534	0,04979	0,04979	0,01832	0,01832	0,00674	0,00674	0,00248	0,00248	0,00091	0,00091	0,00034	0,00034
1	0,36788	0,73576	0,27067	0,40601	0,14936	0,19915	0,07326	0,09158	0,03369	0,04043	0,01487	0,01735	0,00638	0,00730	0,00268	0,00302
2	0,18394	0,91970	0,27067	0,67668	0,22404	0,42319	0,14653	0,23810	0,08422	0,12465	0,04462	0,06197	0,02234	0,02964	0,01073	0,01375
3	0,06131	0,98101	0,18045	0,85712	0,22404	0,64723	0,19537	0,43347	0,14037	0,26503	0,08924	0,15120	0,05213	0,08177	0,02863	0,04238
4	0,01533	0,99634	0,09022	0,94735	0,16803	0,81526	0,19537	0,62884	0,17547	0,44049	0,13385	0,28506	0,09123	0,17299	0,05725	0,09963
5	0,00307	0,99941	0,03609	0,98344	0,10082	0,91608	0,15629	0,78513	0,17547	0,61596	0,16062	0,44568	0,12772	0,30071	0,09160	0,19124
6	0,00051	0,99992	0,01203	0,99547	0,05041	0,96649	0,10420	0,88933	0,14622	0,76218	0,16062	0,60630	0,14900	0,44971	0,12214	0,31337
7	0,00007	0,99999	0,00344	0,99890	0,02160	0,98810	0,05954	0,94887	0,10444	0,86663	0,13768	0,74398	0,14900	0,59871	0,13959	0,45296
8	0,00001	1,00000	0,00086	0,99976	0,00810	0,99620	0,02977	0,97864	0,06528	0,93191	0,10326	0,84724	0,13038	0,72909	0,13959	0,59255
9			0,00019	0,99995	0,00270	0,99890	0,01323	0,99187	0,03627	0,96817	0,06884	0,91608	0,10140	0,83050	0,12408	0,71662
10			0,00004	0,99999	0,00081	0,99971	0,00529	0,99716	0,01813	0,98630	0,04130	0,95738	0,07098	0,90148	0,09926	0,81589
11			0,00001	1,00000	0,00022	0,99993	0,00192	0,99908	0,00824	0,99455	0,02253	0,97991	0,04517	0,94665	0,07219	0,88808
12					0,00006	0,99998	0,00064	0,99973	0,00343	0,99798	0,01126	0,99117	0,02635	0,97300	0,04813	0,93620
13					0,00002	1,00000	0,00020	0,99992	0,00132	0,99930	0,00520	0,99637	0,01419	0,98719	0,02962	0,96582
14							0,00006	0,99998	0,00047	0,99977	0,00223	0,99860	0,00709	0,99428	0,01692	0,98274
15							0,00002	1,00000	0,00016	0,99993	0,00089	0,99949	0,00331	0,99759	0,00903	0,99177
16									0,00005	0,99998	0,00033	0,99983	0,00145	0,99904	0,00451	0,99628
17									0,00001	0,99999	0,00012	0,99994	0,00060	0,99964	0,00212	0,99841
18									0,00001	1,00000	0,00004	0,99998	0,00023	0,99987	0,00094	0,99935
19											0,00001	0,99999	0,00009	0,99996	0,00040	0,99975
20											0,00001	1,00000	0,00003	0,99999	0,00016	0,99991
21													0,00001	1,00000	0,00006	0,99997
22															0,00002	0,99999
23															0,00001	1,00000
24																

TABLE II : LOI NORMALE

Cette table donne les valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861